

2020年天津南开区天津市南大奥宇学校高三二模数学试卷

一、选择题

(本大题共9小题, 每小题5分, 共45分)

1. 若复数 z 满足 $z - |z| = -1 - 3i$, 其中 i 为虚数单位, 则 $z = ()$.

A. $4 + 3i$ B. $3 + 4i$ C. $-5 + 3i$ D. $4 - 3i$

2. 中国诗词大会的播出引发了全民的读书热, 某小学语文老师在班里开展了一次诗词默写比赛, 班里40名学生得分数据的茎叶图如图所示. 若规定得分不小于85分的学生得到“诗词达人”的称号, 小于85分且不小于70分的学生得到“诗词能手”的称号, 其他学生得到“诗词爱好者”的称号, 根据该次比赛的成就按照称号的不同进行分层抽样抽选10名学生, 则抽选的学生中获得“诗词能手”称号的人数为().

9	1	2	5	6	8									
8	0	0	1	2	4	5	7	8						
7	0	2	2	3	3	3	4	5	5	6	9			
6	0	2	2	3	4	4	4	5	7	7	8	9		
5	6	6	8	9										

A. 2 B. 4 C. 5 D. 6

3. 已知 p, q 是简单命题, 那么“ $p \wedge q$ 是真命题”是“ $\neg p$ 是真命题”的().

A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

4. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 $\cos A = \frac{7}{8}, c - a = 2, b = 3$, 则 a 等于().

A. 2 B. $\frac{5}{2}$ C. 3 D. $\frac{7}{2}$

5. 已知一个样本为 $x, 1, y, 5$, 若该样本的平均数为2, 则它的方差的最小值为().

A. 5 B. 4 C. 3 D. 2

6. 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的两顶点为 A_1, A_2 , 虚轴两端点为 B_1, B_2 , 两焦点为 F_1, F_2 , 若以 $A_1 A_2$ 为直径的圆内切于菱形 $F_1 B_1 F_2 B_2$, 则双曲线的离心率是().

A. $\sqrt{5} - 1$ B. $\frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{5} + 1}{2}$ D. $\sqrt{3} + 1$

7. 为了响应国家发展足球的战略, 哈市某校在秋季运动会中, 安排了足球射门比赛. 现有10名同学参加足球射门比赛, 已知每名同学踢进的概率均为0.6, 每名同学有2次射门机会, 且各同学射门之间没有影响. 现规定: 踢进两个得10分, 踢进一个得5分, 一个未进得0分, 记 X 为10个同学的得分总和, 则 X 的数学期望为().

A. 30 B. 40 C. 60 D. 80

8. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC = 1$, $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{NC}, \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{AN} = -\frac{1}{4}$, 则 $\angle ABC = ()$.

A. $\frac{5\pi}{12}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{\pi}{4}$ D. $\frac{\pi}{6}$

9. 若函数 $f(x) = -x - \log_2 \frac{2+ax}{2-x}$ 为奇函数, 则使不等式 $f\left(\frac{1}{m}\right) + \log_2 6 < 0$ 成立的 m 的取值范围是().

- A. $(-\infty, 1)$ B. $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ C. $(-\infty, 0) \cup (0, 1)$ D. $(1, +\infty)$

二、填空题

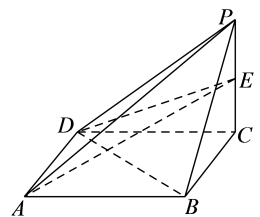
(本大题共6小题, 每小题5分, 共30分)

10. 若集合 $A = \{x | x^2 < 4\}$, $B = \{y | y = x^2 - 2x - 1, x \in A\}$, 则集合 $A \cup B =$ _____ .
11. $\left(x - \frac{1}{x}\right)\left(2x + \frac{1}{x}\right)^5$ 的展开式中, 常数项为 _____ .
12. 已知三棱锥 $S - ABC$ 的所有顶点都在球 O 的球面上, SC 是球 O 的直径, 若平面 $SCA \perp$ 平面 SCB , $SA = AC$, $SB = BC$, 三棱锥 $S - ABC$ 的体积为 9, 则球 O 的表面积为 _____ .
13. 已知关于 x 的不等式 $|x - a| + |x - 3| \geq 2a$ 的解集为 $\mathbf{R}$, 则实数 a 的最大值为 _____ .
14. 秉承提升学生核心素养的理念, 学校开设以提升学生跨文化素养为核心的多元文化融合课程, 选某艺术课程的学生唱歌、跳舞至少会一项, 已知会唱歌的有 2 人, 会跳舞的有 5 人, 现从中选 2 人, 设 ξ 为选出的人中既会唱歌又会跳舞的人数, 其中 $P(\xi > 0) = \frac{7}{10}$, 则选该艺术课程的学生人数为 _____, ξ 的 $E\xi$ 是 _____ .
15. 已知定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $f(x)$ 满足: 当 $x \in (-1, 1]$ 时, $f(x) = \begin{cases} -\frac{x}{x+1}, & -1 < x \leq 0 \\ 2^{2-x} - 2, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$, 且 $f(x+2) = f(x)$ 对任意的 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立. 若函数 $g(x) = f(x) - m(x+1)$ 在区间 $[-1, 5]$ 内有 6 个零点, 则实数 m 的取值范围是 _____ .

三、解答题

(本大题共5小题, 共75分)

16. 已知函数 $f(x) = 2\sqrt{3} \tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \cos^2\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) - \sin(x + \pi)$.
- (1) 求 $f(x)$ 的定义域和最小正周期.
- (2) 若将 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位, 得到函数 $g(x)$ 的图象, 求函数 $g(x)$ 在区间 $[0, \pi]$ 上的最大值和最小值.
17. 如图, 已知四棱锥 $P - ABCD$ 是边长为 1 的正方形, $PB = PD = \sqrt{5}$, $PC = 2$, E 是侧棱 PC 上的动点.



- (1) 求证: 不论点 E 在何位置, 都有 $BD \perp AE$.
- (2) 若 $PA \parallel$ 平面 BDE , 求直线 AE 与平面 BDE 所成角的正弦值.
- (3) 在 (2) 的条件下, 求二面角 $D - AE - B$ 的大小.
18. 等比数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数, $2a_5, a_4, 4a_6$ 成等差数列, 且满足 $a_4 = 4a_3^2$, 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = \frac{(n+1)b_n}{2}$, $n \in \mathbf{N}^*$, 且 $b_1 = 1$.
- (1) 求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式.
- (2) 设 $c_n = \frac{b_{2n+5}}{b_{2n+1}b_{2n+3}} a_n$, $n \in \mathbf{N}^*$, 求证: $\sum_{k=1}^n c_k < \frac{1}{3}$.

19. 已知过点 $(0, -2\sqrt{3})$, 斜率为 $\sqrt{3}$ 的直线 l 过椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的焦点, 椭圆 C 的中心关于直线 l 的对称点在直线 $x = \frac{a^2}{2}$ 上.

(1) 求椭圆 C 的方程.

(2) 过点 $E(-2, 0)$ 的直线 m 交椭圆 C 于点 M 、 N , 且满足 $\tan \angle MON = \frac{4\sqrt{6}}{3\vec{OM} \cdot \vec{ON}}$ (O 为坐标原点), 求直线 m 的方程.

20. 已知函数 $f(x) = ax^2e^{-x}$ ($a \neq 0$)

(1) 若直线 $y = e^{-1}x$ 为曲线 $y = f(x)$ 的切线, 求实数 a 的值.

(2) 求函数 $f(x)$ 的单调区间.

(3) 设函数 $g(x) = \frac{1}{2}(x - \frac{1}{x} + f(x)) - \frac{1}{2}|x - \frac{1}{x} - f(x)| - cx^2$ ($x > 0$), 在(1)的条件下, 若函数 $g(x)$ 为增函数, 求实数 c 的取值范围.